TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a XI-a

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1 \geq 1$ și $a_{n+1} = \sqrt[n+1]{2(a_n - 1)^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați limita lui.

Rogozsan Robert

2. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{3}{2} \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Studiați convergența acestui șir.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Determinați matricele $Y \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot Y = Y \cdot A$.

b. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numărul soluțiilor $X \in M_2(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^{2n} - X^n + I_2 = A$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,

pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,

Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023

Clasa a XI-a

<u>BAREM</u>

1. Se consideră șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ astfel încât $a_1\geq 1$ și $a_{n+1}=\sqrt[n+1]{2\left(a_n-1\right)^n}+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Arătați că șirul $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent și calculați limita lui.

Rogozsan Robert

Soluție : Prin inducție se demonstrează că $a_n\geq 1, \forall n\geq 1$ **2p**

Din ipoteză obținem $\left(a_{n+1}-1\right)^{n+1}=2\left(a_n-1\right)^n \Rightarrow \left(\frac{a_{n+1}-1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{a_n-1}{2}\right)^n$ **1p**

Considerăm șirul $\left(b_n\right)_{n\geq 1}$, $b_n=\left(\frac{a_n-1}{2}\right)^n \Rightarrow b_n=b_1=\frac{a_1-1}{2} \Rightarrow a_n=2\cdot\left(\frac{a_1-1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}+1$ **2p**

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\begin{cases}3, & a_1>1\\ 1, & a_1=1\end{cases}$ **2p**

2. Fie șirul $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$, cu $x_0\in(0,1)$ și $x_{n+1}=\frac{3}{2}\cdot x_n\cdot\left(1-x_n\right), \forall n\in\mathbb{N}$. Studiați convergența acestui șir.

Soluție:

Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=\frac{3}{2}t(1-t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}t \Rightarrow x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ **1p**

Din ipoteză $x_0\in(0,1)$. Studiind variația funcției f, observăm că dacă $x\in(0,1)$ atunci $f(x)\in\left(0,\frac{3}{8}\right]\subset(0,1)$, deci demonstrăm prin inducție că $x_n\in(0,1), \forall n\geq 0$ **1p**

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\cdot x_n\cdot\left(-3x_n+1\right)$

Cazul I: $x_0=\frac{1}{3} \overset{inductiv}{\Rightarrow} x_n=\frac{1}{3}, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{3}$,deci șirul este convergent.....................................**1p**

Cazul II:

Dacă $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ conține un termen $x_k\in\left(0,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x_{k+1}=f\left(x_k\right)\in\left(0,\frac{1}{3}\right) \overset{inductiv}{\Rightarrow} x_n\in\left(0.\frac{1}{3}\right), \forall n\geq k$ (1)

$\Rightarrow x_{n+1}-x_n>0 \Rightarrow \left(x_n\right)_{n\geq k}$ este strict crescător $\overset{(1)}{\Rightarrow} \left(x_n\right)$ este convergent..**2p**

În caz contrar, avem $x_n \geq \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, deci $x_n \in \left[\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow x_{n+1} - x_n \leq 0$, deci (x_n) este descrescător și, fiind mărginit, este convergent...**2p**

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Determinați matricele $Y \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot Y = Y \cdot A$.

b. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numărul soluțiilor $X \in M_2(\mathbb{C})$ ale ecuației $X^{2n} - X^n + I_2 = A$.

Soluție:

a. Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Din $AY = YA$ se obține $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$ **2p**

b. Înmulțind egalitatea din ipoteză la stânga și la dreapta cu X obținem că

$XA = AX \overset{a)}{\Rightarrow} X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$..**1p**

Prin inducție demonstrăm că $X^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix}, \forall m \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Ecuația devine $\begin{pmatrix} a^{2n} & 2n \cdot a^{2n-1} \cdot b \\ 0 & a^{2n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^n & n \cdot a^{n-1} \cdot b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

De unde obținem sistemul $\begin{cases} a^{2n} - a^n - 2 = 0 & (1) \\ 2n \cdot a^{2n-1} \cdot b - n \cdot a^{n-1} \cdot b = 12 & (2) \end{cases}$...**1p**

Din (1) obținem $a^n = -1$ sau $a^n = 2$.

Fiecare din aceste ecuații are în mulțimea numerelor complexe câte *n* soluții, iar pentru fiecare valoare a lui *a*, numărul *b* este unic determinat din (2). Deci ecuația are *2n* soluții...**2p**